

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۲/۸/۱۹

وقت : ۷۵ دقیقه



دانشگاه گیلان
دانشکده ریاضی

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

امتحان میان ترم درس : ریاضی ۲-فنی (۵ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / ~~کرم~~) ۱۳۹۲ - ۱۳۹۳

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - الف) معادله صفحه گذرنده از نقطه $M = (0, 1, 2)$ و شامل خط زیر را بنویسید : ۱۰ نمره

$$x = 2 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 1 + 3t$$

ب) معادله کره به مرکز نقطه $A = (2, 3, 5)$ و مماس بر صفحه $2x + 2y - z + 7 = 0$ را بنویسید.

۱۰ نمره ناحیه داخل کره را توصیف کنید. (به صورت مجموعه بنویسید.)

سوال ۲ - مولفه‌های مماسی و قائم شتاب را برای خم $f(t) = (t, t^2, t^3)$ و در نقطه $(0, 0, 0)$ بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۳ - خم $r(t) = a \cos t \vec{i} + t \vec{j} + a \sin t \vec{k}$ را در دستگاه مختصات رسم کرده و انحنای آن را

۱۵ نمره در هر نقطه به دست آورید.

سوال ۴ - ناحیه $V = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 5\}$ را در R^3 توصیف کنید. ۱۵ نمره

سوال ۵ - اگر تمام مشتقات نسبی مرتبه دوم $z = f(x, y)$ موجود باشند و $x = r^\gamma \cos \theta, y = r^\gamma \sin \theta$

۱۵ نمره تابع z_{rr} را محاسبه کنید.

موفق باشید

جواب سوال ۱: الف) بردار هادی خط l برابر است با $\vec{u} = (1, -2, 3)$. نقطه دلخواه $P = (2, 3, 1)$ از خط l را در نظر می گیریم. صفحه مورد نظر، موازی بردارهای $\vec{u} = (1, -2, 3)$ و $\vec{MP} = (2, 2, -1)$ است بنابراین این بردار قائم صفحه، موازی بردار $\vec{N} = \vec{MP} \times \vec{u} = (4, -7, -6)$ خواهد بود. معادله صفحه مورد نظر عبارت است از: $4x - 7y - 6z = -19$
ب) چون کره مورد نظر بر صفحه مماس است پس فاصله مرکز آن تا صفحه برابر شعاع خواهد بود. فاصله نقطه $A = (2, 3, 5)$ تا صفحه $2x + 2y - z + 7 = 0$ برابر است با $r = \frac{|4 + 6 - 5 + 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{12}{3} = 4$ و معادله کره عبارت است از:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 16$$

جواب سوال ۲: $f(t) = (t, t^2, t^3)$, $f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $f''(t) = (0, 2, 6t)$, $T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1, 2t, 3t^2)$
 $T'(t) = \frac{-4t-18t^3}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)^3}}(1, 2t, 3t^2) + \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(0, 2, 6t) \rightarrow T'(0) = (0, 2, 0) \rightarrow N(t) = \frac{T'(0)}{|T'(0)|} = (0, 1, 0)$
 $\rightarrow a_T(0) = T(0) \cdot f''(0) = (1, 0, 0) \cdot (0, 2, 0) = 0$, $a_N(0) = N(0) \cdot f''(0) = (0, 1, 0) \cdot (0, 2, 0) = 2$

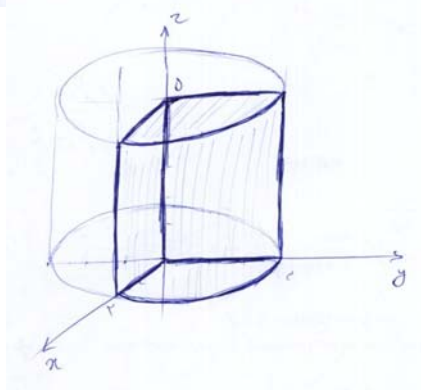
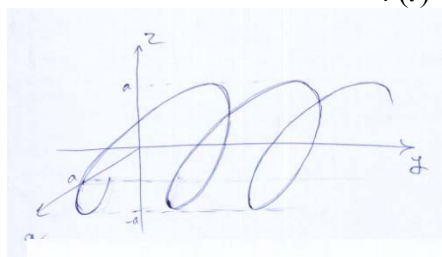
جواب سوال ۳: داریم: $r(t) = (a \cos t, t, a \sin t) \rightarrow r'(t) = (-a \sin t, 1, a \cos t)$

$$r''(t) = (-a \cos t, 0, -a \sin t) \rightarrow |r'(t)| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\rightarrow r'(t) \times r''(t) = (-a \sin t, -a^2, a \cos t)$$

$$|r'(t) \times r''(t)| = a\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\rightarrow k(t) = a\sqrt{a^2 + 1} / (\sqrt{a^2 + 1})^2 = a / \sqrt{a^2 + 1}$$



جواب سوال ۴: ناحیه V قسمتی از داخل استوانه بیضوی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

است که در ناحیه اول دستگاه مختصات واقع شده و به صفحات مختصات و صفحه $z = 5$ محدود است.

جواب سوال ۵:
 $z_r = f_x x_r + f_y y_r \rightarrow z_{rr} = (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r) x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx} x_r + f_{yy} y_r) y_r + f_y y_{rr}$
 $\rightarrow z_{rr} = (r \cos \theta f_{xx} + r \sin \theta f_{xy})(r \cos \theta) + (r \cos \theta) f_x$
 $+ (r \cos \theta f_{yx} + r \sin \theta f_{yy})(r \sin \theta) + r \sin \theta f_y$
 $\rightarrow z_{rr} = r^2 (\cos^2 \theta f_{xx} + \sin \theta \cos \theta (f_{xy} + f_{yx}) + \sin^2 \theta f_{yy}) + r (\cos \theta f_x + \sin \theta f_y)$